Revista de Educação, Vol. XVIII, nº 1, 2011 | 49 - 82

A DEMONSTRAÇÃO MATEMÁTICA NO 8.º ANO NO CONTEXTO DE UTILIZAÇÃO DO *GEOMETER'S SKETCHPAD*

Sílvia Machado,
Instituto de Educação, Projecto AREA

Leonor Santos,
Instituto de Educação, Projecto AREA

A preocupação crescente com o ensino e a aprendizagem da demonstração a nível internacional é visível através dos vários sites e projectos exclusivamente dedicados a este tema e do número de artigos que sobre ele se publicam anualmente em todo o mundo. Contudo, em Portugal, a investigação directamente relacionada com o ensino e a aprendizagem da demonstração ainda é em número reduzido.

É indispensável que os alunos ao longo da sua experiência matemática demonstrem a fim de contactarem com um dos métodos fundamentais da Matemática (Davis & Hersh, 1995) e apreciarem a natureza desta ciência. O ensino e a aprendizagem da demonstração matemática têm-se realizado de diversas formas, umas mais teóricas, outras mais práticas, umas partindo de teoremas apresentados pelo professor, outras partindo de conjecturas formuladas pelos alunos. Actualmente, a educação matemática dispõe de novas ferramentas, nomeadamente do computador e de *software* específico, pelo que o ensino da demonstração envolvendo a formulação e teste de conjecturas pode e deve tirar partido destas ferramentas.

O estudo[1] a que este artigo se reporta teve como foco principal a capacidade de demonstração matemática. Procurou-se estudar a capacidade de demonstração matemática de alunos do 8.º ano de escolaridade, num contexto de utilização do *software Geometer's Sketchpad* (*GSP*). Para tal, foram formuladas as seguintes questões:

- Que significado atribuem os alunos a conjectura? Que processos utilizam para formular e testar as suas conjecturas num contexto de utilização do *GSP*?

- Que significado atribuem os alunos à demonstração de conjecturas formuladas com o *GSP*? Que funções lhe atribuem?

---

[1] Para conhecer este estudo com mais profundidade ver Machado, S. (2005)

- Que demonstrações reconhecem e produzem os alunos a partir de conjecturas formuladas com o *GSP*? Que dificuldades apresentam?

Neste estudo é atribuído à capacidade de demonstração matemática um significado amplo, uma vez que inclui não só deduzir uma determinada conclusão partindo de premissas verdadeiras e usando outros resultados aceites como verdadeiros, mas também a compreensão do que é uma conjectura, uma demonstração e um teorema, e ainda o processo de descoberta que inclui a formulação de conjecturas.

DEMONSTRAÇÃO MATEMÁTICA

Uma das actividades essenciais do matemático é certamente a demonstração. Existem, contudo, duas vertentes sobre as quais se pode discutir a demonstração. Uma, intrínseca, respeitante ao seu conteúdo. A ela está associada a dedução, a axiomatização, a abstracção e a formalização (Davis & Hersh, 1995; Stewart, 1995; Chaitin, 2003). Outra, extrínseca, relacionada com a sua aceitação junto da comunidade matemática. Existe todo um processo social, desenvolvido pela comunidade dos matemáticos, que valida e revalida a demonstração (Ernest, 1994; Davis & Hersh, 1995; Hersh, 1997). Ao contrário do que muitas vezes se supõe, "os matemáticos nunca trabalharam como eremitas isolados" (Hersh, 1994, p. 16). Ernest (1994) afirma que desde a sua origem até à actualidade "a prova matemática está na sua raiz, dialéctica, no diálogo humano e na troca de ideias" (p. 41). Acresce que os trabalhos de colaboração são cada vez em maior número, podendo actualmente serem considerados verdadeiros trabalhos de equipa (Guimarães, 2003). É este contexto que permite o sucesso da actividade matemática, dado ser difícil obterem-se ideias matemáticas realmente boas. Estas resultam do trabalho conjunto de diversas pessoas ao longo de um período amplo de tempo (Stewart, 1995).

Através de um processo de tentativa e erro, de muitos becos sem saída, consegue-se vislumbrar a resposta a certas questões ou ideias que começam a tomar a forma de conjecturas. Como afirma Polya (2003), existe a matemática em desenvolvimento e a matemática final. Enquanto a primeira é uma ciência indutiva experimental, a segunda é uma ciência dedutiva sistemática. Também Chaitin (2003) defende que existe uma componente empírica em matemática. Na sua perspectiva, no processo de descoberta, os matemáticos comportam-se em parte como físicos: fazem cálculos, vêem padrões e formulam conjecturas. Conjectura é, segundo Polya (1990), "uma descrição simples de factos dentro dos limites da nossa experiência material e uma certa esperança de que essa descrição se possa aplicar além dos limites da nossa experiência material" (p. 68), que surge quando "recolhemos observações relevantes, examinamo-las e comparamo-las, notamos pequenas regularidades, hesitamos, cometemos erros e eventualmente somos bem sucedidos na *combinação de detalhes dispersos num todo aparentemente maravilhoso*" (idem, itálico no original). Se uma conjectura é refutada, não pode ser verdadeira. A refutação é definitiva, a aceitação é provisória.

Se aceitarmos que uma educação matemática de qualidade passa por permitir que todos os alunos possam adquirir uma compreensão progressiva da natureza da Matemática, é esperado o reconhecimento da importância dos alunos desenvolverem a capacidade de demonstração matemática. Tais preocupações emergem em diversos documentos curriculares de Matemática (NCTM, 1991; 2000; DEE, 1999; DEB, 2001). Em particular, em Portugal, fazem parte da competência matemática a desenvolver pelos alunos no seu percurso ao longo do ensino básico, oito aspectos, de entre os quais se destacam:

> A predisposição para raciocinar matematicamente, isto é, para explorar situações problemáticas, procurar regularidades, fazer e testar conjecturas, formular generalizações, pensar de maneira lógica;
>
> O gosto e a confiança pessoal em realizar actividades intelectuais que envolvem raciocínio matemático e a concepção de que a validade de uma afirmação está relacionada com a consistência da argumentação lógica, e não com alguma autoridade exterior;
>
> A compreensão das noções de conjectura, teorema e demonstração, assim como das consequências do uso de diferentes definições (DEB, 2001, p. 57)

Também o programa de Matemática do 3.º ciclo (DGEBS, 1991), que vigora a par do Currículo Nacional do Ensino Básico (DEB, 2001), apresenta como objectivo geral ao nível das capacidades/aptidões, "desenvolver o raciocínio", que inclui "distinguir e utilizar raciocínios dedutivos e indutivos; fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, factos conhecidos, propriedades e relações; discutir ideias e produzir argumentos convincentes" (p. 177).

Várias são as funções atribuídas à demonstração no contexto da sala de aula. De entre elas destacam-se as seguintes: verificação/convencimento, explicação, comunicação, e desafio intelectual. É a função de explicação que assume uma posição privilegiada neste contexto, pois uma demonstração que clarifique por que motivo um resultado é válido, ou não, contribui para a compreensão desse resultado (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999; De Villiers, 1999, 2000; Boavida, 2001). Esta função também é importante para os matemáticos, embora para estes a função principal da demonstração seja a de verificação/convencimento, no sentido de validar um resultado.

A forma como se pretende que os alunos trabalhem a demonstração assemelha-se à forma como os matemáticos o fazem. A matemática não surge aos matemáticos como um produto acabado, portanto não é assim que deve chegar aos alunos. A demonstração não pode ser vista como um fim, mas sim como um meio muito rico de aprendizagem. Donde, o professor deverá oferecer contextos de aprendizagem favoráveis à discussão de ideias e à formulação de conjecturas. De acordo com Abrantes *et al.* (1999, p. 85) "fazer conjecturas e testar hipóteses são actividades que devem preceder o desenvolvimento de abordagens formais. Em muitas situações, os alunos conseguem fazer demonstrações adequadas ao seu nível etário”. Contudo, são diversos os estudos com alunos do ensino básico que apontam para dificuldades que, em geral, os alunos apresentam quando realizam demonstrações, quer porque a desvalorizam (Brocardo, 2001), quer porque consideram a verificação de alguns casos como suficiente para validar uma afirmação (Rocha, 2003; Marques, 2004; Teixeira, 2004), quer ainda porque não constroem provas válidas, mesmo quando valorizam argumentos gerais e explicativos (Healy & Hoyles, 2000). A comunicação dos seus argumentos lógicos, especialmente por escrito, é a tarefa mais complicada (Junqueira, 1995, Barbosa, 2002). Também Hoyles e Küchemann (2002) evidenciam que a aprendizagem da prova dedutiva em Matemática é complexa e que o seu progresso não é linear e livre de dificuldades. Guimarães (2003) afirma que uma das razões apontadas por uma das professoras do ensino básico e secundário, que participou no seu estudo, para a quase inexistência de demonstração na sua aula foi os alunos apresentarem dificuldade em compreender a necessidade de demonstrar e relutância em fazê-lo.

A DEMONSTRAÇÃO E O GEOMETER’S SKETCHPAD

O aparecimento do computador fez surgir um novo paradigma de investigação, a matemática experimental (Ponte & Canavarro, 1997), não só porque veio permitir estudar ou aprofundar áreas da Matemática que de outra forma não o poderiam ser, mas também porque veio desempenhar um papel importante no processo de descoberta de nova matemática (Stewart, 1995). Esta ferramenta coloca à disposição dos matemáticos não só a possibilidade de realizar um grande número de experiências, que excede a capacidade do ser humano, potencialidade esta que permitiu demonstrar o teorema das quatro cores, mas também a de realizar experiências muito complicadas, que explorando milhares de hipóteses, gera estratégias de sucesso, caso do problema de Robbins (Ponte, Boavida, Graça & Abrantes, 1997).

Também no contexto educacional, o computador, através de *software* disponível, é visto como um importante recurso no ensino e na aprendizagem da Matemática:

> Usando modelos concretos, desenhos e *software* de geometria dinâmica, os estudantes podem empenhar-se em ideias geométricas (…) Ferramentas como o *software* de geometria dinâmica permitem aos estudantes modelar, e terem uma experiência interactiva com uma grande variedade de formas bidimensionais. (NCTM, 2000, p. 41)

Em Portugal, se é certo afirmar-se, no programa de Matemática do 3º ciclo (DGEBS, 1991), que o computador “pode constituir um valioso apoio para o aluno e para o professor” (p. 197), a sua utilização é apenas sugerida “sempre que oportuno e possível” (p. 197). Já no Currículo Nacional do Ensino Básico (DEB, 2001) este é um dos recursos que, a par da calculadora e de materiais manipuláveis, deve ser utilizado pelos alunos: "os alunos devem ter oportunidades de trabalhar com a folha de cálculo e com diversos programas educativos, nomeadamente de gráficos de funções e de geometria dinâmica" (p. 71).

Sendo a geometria um tema matemático que constitui um campo propício ao desenvolvimento do pensamento matemático (Abrantes *et al*., 1999) e em particular à actividade de demonstração, a utilização de *software* que funcione como ambiente geométrico dinâmico trará benefícios, quer à aprendizagem da geometria, quer à abordagem didáctica deste tema. De acordo com Ponte e Canavarro (1997), "a aprendizagem da geometria pode tornar-se activa e interessante e realizar-se num ambiente experimental e investigativo, onde os alunos tenham possibilidade de testar e formular conjecturas" (p. 9). Assim, a utilização deste tipo de *software* adequa-se ao estudo da geometria, partindo da indução para a dedução, isto é os conceitos e objectos geométricos começam a ser estudados de um ponto de vista experimental e indutivo, devendo os resultados assim obtidos serem demonstrados (Veloso, 1998).

Pelas suas características, o *GSP* é especialmente adequado e útil quando os alunos se envolvem em actividades de investigação e exploração (Garry, 2003; Keyton, 2003). Ao permitir um grande número de experiências num curto espaço de tempo favorece a formulação de conjecturas, através da observação do que permanece constante no meio de tudo o que varia, e, nalguns casos, o surgimento de contra-exemplos para as conjecturas formuladas. De Villiers (1999, 2001) refere que o não surgimento de contra-exemplos fornece um elevado grau de convencimento quanto à veracidade das conjecturas. Tal facto não constitui, para si, um impedimento para procurar uma demonstração, mas antes uma motivação. De Villiers (2003), no contexto de uma investigação com recurso ao *GSP*, explica: "não senti necessidade de obter uma maior certeza, mas sim a necessidade de *explicação* (porque é que as generalizações eram verdadeiras?) e o *desafio intelectual* (será que consigo demonstrá-las?)" (p. 34, itálico no original).

De acordo com Scher (1999) e De Villiers (2003), a construção e manipulação de figuras permitiram-lhes observar outras relações mais simples de demonstrar. O processo de descoberta e de demonstração que estes matemáticos descrevem estão interligados não ocorrendo de forma linear e sequencial. Scher (1999) afirma ainda que o *GSP* influencia a forma como raciocinamos matematicamente do mesmo modo que o processador de texto influencia a nossa escrita.

Também na educação matemática, diversos estudos relatam experiências de sucesso na utilização do *GSP* quando se pretende trabalhar a demonstração na sala de aula (Hadas, Hershkowitz & Schwarz, 2000; Jones, 2000; Marrades & Gutiérrez, 2000; Mariotti, 2000). Em todos estes estudos os contextos de aprendizagem foram cuidadosamente planeados, e foram dadas oportunidades para os alunos cometerem erros, reflectirem e conjecturarem (Hanna, 2000). Igualmente Mudaly e De Villiers (2000) descrevem a realização de uma tarefa no *GSP* em que os alunos, apesar de convencidos da veracidade de uma conjectura apenas com as experiências realizadas, manifestaram querer uma explicação para satisfazer a sua curiosidade. A investigação em Portugal aponta no mesmo sentido, pois este tipo de *software* é referido como contribuindo para que os alunos sintam a necessidade de demonstrar (Mota, 2004), para validar, explicar e comunicar as conjecturas formuladas (Barbosa, 2002) e para que desenvolvam capacidades neste domínio (Fonseca, 2004). É ainda apontado como facilitador do trabalho com tarefas de investigação (Brocardo, 2001).

METODOLOGIA

O estudo que serviu de base ao presente artigo seguiu uma abordagem de natureza qualitativa interpretativa (Bogdan & Biklen, 1994). O *design* de investigação, estudo de caso qualitativo, resulta das questões do estudo serem de natureza explicativa, de não se pretender controlar os acontecimentos manipulando as possíveis causas de comportamento dos participantes e dos acontecimentos terem lugar no momento do estudo (Yin, 2003).

Estudaram-se dois alunos de uma mesma turma do 8.º ano de escolaridade de uma escola dos arredores de Lisboa. A escolha do 8.º ano deveu-se a ser um ano de escolaridade em que a demonstração matemática começa a surgir com maior visibilidade. A turma a que estes alunos pertenciam era constituída, em geral, por alunos interessados, curiosos, participativos e com experiência anterior de trabalho com o *GSP*. Além disso, a professora de Matemática da turma era a mesma do 7.º ano. Dado ser um primeiro estudo em Portugal sobre a aprendizagem da demonstração matemática num contexto de utilização do *GSP* com alunos deste nível de ensino, optou-se por seleccionar dois alunos que possuíssem uma boa relação com o computador em geral e com o *GSP* em particular, gosto por desafios, uma boa capacidade de comunicação, um forte espírito crítico, uma boa capacidade de raciocínio, persistência na resolução de questões não imediatas e bom aproveitamento a Matemática. Por outras palavras, procurou-se escolher alunos caso que oferecessem alguma garantia, pelo menos à partida, de que seriam capazes de elaborar algum tipo de demonstração matemática. A inexistência de qualquer produção por parte dos alunos inviabilizaria a realização deste estudo. Para esta selecção, foram realizadas entrevistas e analisados relatórios, de duas tarefas[2], de alguns alunos, seleccionando-se os alunos Alberto e Joana.

A recolha de dados decorreu no ano lectivo 2003/2004 e envolveu: (i) a observação acompanhada do registo áudio e vídeo de oito aulas de 45 minutos e duas de 90 minutos, entre Janeiro e Maio; (ii) a realização de seis entrevistas individuais, a cada um dos alunos caso, gravadas em áudio, uma antes da observação das aulas, outra após a realização de cada tarefa e a última no final do estudo, e (iii) a análise documental dos produtos realizados pelos alunos aquando das tarefas (relatórios, *sketchs* e documentos) e do diário de bordo da professora/investigadora. Reportou-se ao trabalho desenvolvido com quatro tarefas (ver anexo) que foram apresentadas aos alunos em suporte de papel e apenas com a indicação de que procedessem a uma leitura cuidada e abrissem o ficheiro correspondente, quando era caso disso. Cada tarefa realizou-se numa aula de 45 minutos, onde os alunos trabalhavam,

[2] Uma sobre famílias de funções e outra sobre a altura de um triângulo rectângulo relativa à hipotenusa.

geralmente, aos pares com o *GSP*. Na aula seguinte, também de 45 minutos, procedia-se à discussão do trabalho realizado na aula anterior. Esta discussão, de uma maneira geral, processava-se no grupo turma e incluía a refutação e demonstração de conjecturas. As demonstrações ou eram realizadas no quadro por um aluno com o contributo de todos os outros ou, tendo sido primeiramente produzidas no lugar, eram aí apresentadas por um aluno e discutidas até serem aceites por todos os outros e pela professora. Sempre que um aluno não conseguia avançar na sua demonstração, ou não a conseguia explicar aos colegas, outro colega contribuía com o seu conhecimento. Na tarefa “Propriedades do paralelogramo”, além das duas aulas de 45 minutos, ocupou-se mais uma aula de 90 minutos. Na tarefa “O quadrilátero de Varignon” realizou-se mais uma aula de 90 minutos, inicialmente não prevista, para analisar as conjecturas que não houve tempo de analisar na aula de discussão. Esta aula realizou-se com algum desfasamento das duas de 45 minutos por questões organizacionais das actividades lectivas.

Em todas as tarefas os alunos realizaram em casa um relatório, aos pares na tarefa “Propriedades dos paralelogramos” e individual nas restantes. A escolha da primeira tarefa, “Uma ilha nos mares do sul”, deveu-se à solução do problema aí apresentado ser, à primeira vista, surpreendente. Pretendia-se que este facto despertasse a curiosidade dos alunos, motivando-os para a procura de uma demonstração com o objectivo de perceber o porquê das suas observações.

Com a segunda tarefa, “Propriedades dos paralelogramos”, de formulação aberta, previa-se que os alunos formulassem várias conjecturas. Posteriormente proceder-se-ia a uma pequena organização local da matemática, para que compreendessem que ao demonstrarem um resultado podiam, imediatamente, usá-lo para demonstrar outro. Na primeira aula os alunos receberam apenas a ficha “Propriedades dos paralelogramos (1)”. No início da segunda aula, de 45 minutos, foi-lhes fornecida a ficha “Propriedades dos paralelogramos (2)” e indicado que trabalhariam em grupos de três ou quatro elementos. Pretendia-se que confrontassem as conjecturas descobertas na aula anterior, produzissem uma lista com todas elas e avançassem para a sua demonstração ou refutação, sem que isso lhes fosse explicitamente indicado. Ficava a cargo dos alunos decidirem se precisavam, ou não, de alguma demonstração e para quê. Na terceira aula, foi dado tempo aos grupos para concluírem a ficha fornecida na aula anterior. Em seguida, a professora forneceu a ficha de trabalho “Propriedades dos paralelogramos (3)”. Os últimos 45 minutos desta aula foram ocupados com a discussão no grupo turma e refutação ou demonstração de algumas conjecturas formuladas, tendo ficado outras por analisar, devido à falta de tempo.

Com a terceira tarefa, “Quadriláteros, pontos médios e vértices”, de formulação mais fechada, procurou-se mostrar aos alunos que não podiam considerar como certa uma relação só porque a observavam com o *GSP*. Pretendia-se, ainda, clarificar alguns conceitos, nomeadamente o de conjectura e o de contra-exemplo, a partir da formulação de uma única conjectura[3] que se revelaria falsa. Porém, durante este trabalho, os alunos tomaram a iniciativa de procurar outras relações além da que era sugerida na ficha de trabalho, o que fez com que surgissem outras conjecturas. Durante a aula de discussão, ao contrário do que aconteceu com as outras tarefas, nenhum aluno foi ao quadro e a professora assumiu um protagonismo maior do que o habitual. Indo ao encontro dos objectivos para esta tarefa apenas se discutiu a conjectura nesta induzida e houve aspectos que se destacaram no discurso da professora, nomeadamente o que caracteriza um contra-exemplo, uma conjectura, e o modo como se deve olhar para uma conjectura formulada no *GSP*.

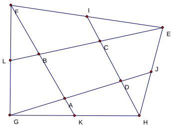
A escolha da última tarefa, "O quadrilátero de Varignon", deveu-se a permitir a formulação de um elevado número de conjecturas, seu teste e demonstração e o revisitar as conjecturas formuladas aquando da tarefa "Propriedades do paralelogramo". Na aula de discussão, a professora pediu aos alunos que dissessem apenas as conjecturas que não foram rejeitadas, uma vez que eram muitas as formuladas, e registou-as no quadro sem a preocupação de qualquer ordem especial.

A análise dos dados teve início ainda no ano lectivo 2003/2004 e foi concluída em 2004/2005. As transcrições foram analisadas detalhadamente, recorrendo à análise de conteúdo, tentando identificar aspectos que permitissem avançar numa resposta às questões do estudo, pois de acordo com Bardin (1977) os objectivos dos métodos da análise de conteúdo são "a ultrapassagem da incerteza" (p. 29) e "o enriquecimento da leitura" (idem). As categorias foram definidas a posteriori à medida que se analisavam os dados, tendo sempre presente o quadro de referência teórico e as questões do estudo (Yin, 2003).

É ainda de assinalar que, neste estudo, a investigadora foi simultaneamente professora da turma. Porém esta não pretendeu problematizar a sua prática, mas sim usá-la para estudar um problema educativo e contribuir para o seu conhecimento. Tal opção acarretou algumas dificuldades na gestão da recolha de dados e uma maior responsabilidade, pois tudo dependia de si. Contudo, a câmara de vídeo e as gravações áudio desempenharam um papel importante, pois facilitaram o rever das situações em que participou, agora, na medida do possível, só com os olhos de investigadora.

Este duplo papel – professora e investigadora – contribuiu para que as interferências no ambiente natural fossem minimizadas e facilitou o ir ao encontro do objectivo do estudo, uma vez que a investigadora/professora geria as interacções com os alunos. Porém, o desempenho deste duplo papel poderia ter influenciado as respostas dos alunos nas entrevistas e relatórios,

3 Para um quadrilátero nas condições da figura, o quociente entre a área do quadrilátero [ABCD] e o quadrilátero [GHEF] é 0,2.



levando-os a responder aquilo que pensavam que a professora queria ouvir ou ler e não o que efectivamente pensavam. Todavia, pensa-se que, de uma maneira geral, tal não aconteceu, pois (i) na realização destas tarefas não estiveram presentes momentos formais de avaliação, (ii) o conhecimento mais profundo que a professora tem dos alunos permitir-lhe-ia detectar possíveis intenções dos alunos e (iii) foram realizadas diferentes tarefas e utilizados diferentes instrumentos de recolha de dados, tendo sido feita a sua triangulação aquando da análise dos dados.

ALBERTO

Alberto é um jovem de 13 anos com um forte espírito crítico, questionador e participativo, quer do seu lugar, quer no quadro onde está sempre disponível para ir mostrar e explicar o seu trabalho aos colegas. Gosta de desafios, pois as coisas demasiado fáceis não lhe dão prazer: “há coisas muito fáceis que não me dão gozo nenhum fazer” (1ª entrevista, Novembro 2003).

Talvez por falta de hábito, Alberto não gosta de estudar Matemática: “Sim, se estiver com atenção nas aulas... não preciso de estudar muito em casa, portanto, nunca me devo ter habituado a estudar muito Matemática, portanto não gosto [de estudar]” (idem). Contudo, gosta desta disciplina, à qual obteve Nível 5 nos 5.º e 6.º anos e Nível 4 no 7.º ano. Este gosto pela Matemática deve-se à importância que lhe atribui: “a Matemática é muito importante, stôra. Portanto, gosto de Matemática porque é importante...” (idem). Relativamente ao grau de dificuldade, esta não merece destaque das outras disciplinas: “Eu acho que a Matemática tem o mesmo grau de dificuldade que as outras (...) porque a Matemática a gente não tem de decorar nada. Matemática se a gente perceber sabe” (idem). Sente dificuldade em definir a Matemática, mas acaba por restringi-la aos números: “Ai... Eu nunca consegui caracterizar muito bem a Matemática. A Matemática! Uma data de números!” (Última entrevista, Junho 2004).

Alberto prefere o trabalho individual ao trabalho em pequenos grupos, e a ter de realizá-lo quanto menor o grupo melhor. Esta preferência deve-se ao gosto por fazer as coisas à sua maneira: “Eu acho que trabalho melhor sozinho do que com dois. É verdade, mas trabalho melhor com dois do que trabalho com quatro. Aquilo com quatro… primeiro com dois é mais fácil eu controlar o trabalho, dividir o trabalho” (3ª entrevista, Março 2004). A discussão com toda a turma é o modo de trabalho que diz preferir pela entreajuda e debate de ideias que proporciona: “Quando um vai ao quadro os outros tentam ajudar. Gosto de discutir as coisas. Com a ajuda dos outros ver o que é que eu falhei” (Última entrevista, Junho 2004).

Este jovem utiliza o computador sem dificuldades, quer para trabalhar, quer nos seus tempos livres. Gosta de trabalhar com o computador em geral e com o *GSP* em particular, pois “é um programa simples, é fácil de trabalhar” (1ª entrevista, Novembro 2003) que permite visualizar várias construções de uma forma mais rápida: ”Primeiro a gente pode ver mais hipóteses” (idem).

FORMULAÇÃO E TESTE DE CONJECTURAS

Alberto, no início do estudo, teve alguma dificuldade em atribuir um significado a conjectura, mas acabou por referi-la como uma desconfiança que se tem de tirar a limpo: "Já sei. Uma espécie de hipóteses. Aquela coisa que a gente desconfia que acontece e depois tem de ir ver se acontece ou não" (1ª entrevista, Novembro 2003). Esta desconfiança surge após algumas experiências e observações: "E a gente ia ver, por exemplo a gente supunha: por exemplo pus 10 e se eu puser para aqui 2000 se calhar já passa para o outro lado, mas não passava..." (idem).

Nas três primeiras tarefas surgem afirmações de Alberto que deixam dúvidas se percebeu o carácter geral de uma conjectura. Por exemplo, na segunda tarefa, formulou a conjectura "Num paralelogramo as diagonais são sempre diferentes". Na continuação do seu trabalho com o *GSP* observa que tal não se verifica para os casos do quadrado e do rectângulo:

> **Alberto:** As diagonais são sempre diferentes. Porque a distância entre um vértice e o outro é sempre igual. Isto está uma grande confusão. Agora deixa-me cá ver. Agora vou construir um… um paralelogramo?
>
> **Frederico:** Outra vez. Para isso deixavas aquele.
>
> **Alberto:** Ah, não é preciso. As diagonais… Ah, não pode ser. Agora como é que vou construir aqui um quadrado? Stôra, Stôra!! Olhe lá como é que eu ando com este lado para aqui?
>
> **Professora:** Isso é um paralelogramo, mas é um paralelogramo especial.
>
> **Alberto:** Mas eu quero construir um quadrado.
>
> **Professora:** Ah, mas construir um quadrado com rigor ou queres-te aproximar do quadrado?
>
> **Alberto:** Não. Aproximar de um quadrado. Olhe já está um quadrado. Já está um quadrado. Com um quadrado e um rectângulo as diagonais são sempre iguais.

No entanto, não apresentou, no seu relatório, esta conjectura como rejeitada, mas reescreveu-a sem a palavra sempre. Apenas na quarta tarefa é claro que já compreendeu o carácter geral de uma conjectura, como é visível na seguinte resposta a uma questão do seu parceiro: "Mas isto tem que dar para todos, isto não tem nada que ser um rectângulo" (Aula no *GSP*).

O rigor com que formulou conjecturas também evoluiu. A satisfação na formulação de muitas conjecturas, levou-o, por vezes, a formular conjecturas que não o eram efectivamente e a formular uma conjectura à mínima observação. Tal é visível na seguinte reacção, após ter perguntado à professora se um paralelogramo era um polígono regular: "Olha outra conjectura, um paralelogramo é um polígono irregular. Eu perguntei à stôra. É uma conjectura. Eu pensava que era. Para ter 10 conjecturas tem que ser assim!" (2ª tarefa, 2ª aula). É durante a realização da quarta tarefa que começa a revelar um maior cuidado na redacção das suas conjecturas, tendo em conta as condições em que as formula. Por exemplo, começou por escrever uma conjectura relativa ao rectângulo e ao quadrado da seguinte forma: "Se for um quadrado ou um rectângulo as áreas dos triângulos são iguais". Logo de seguida diz que não está bem e reescreve-a desta outra forma: "Se o quadrilátero for um quadrado ou um rectângulo as áreas dos triângulos formados a partir dos pontos médios são iguais". Tal cuidado pode dever-se ao facto de, na tarefa anterior, a professora ter reforçado que uma conjectura não é só o resultado observado, mas inclui também as condições em que tal observação se realiza.

Quer no início, quer no fim do estudo, afirmou obter as suas conjecturas através de experiências e observações. Foram identificadas no discurso do Alberto a utilização do raciocínio por analogia e a observação de invariantes na formulação de conjecturas. A utilização do raciocínio por analogia é visível no seu discurso durante a entrevista relativa à tarefa "Propriedades dos paralelogramos":

> Eu lembrei-me que houve uma actividade, uma tarefa atrás que se a gente somasse os dois lados mais pequenos, até foi o teorema de Pitágoras, os dois quadrados pequenos vão dar o grande. E o grande menos o pequeno vai dar o médio e o grande menos o médio vai dar o pequeno e eu lembrei-me disso e fui tentar fazer isso com o paralelogramo. Mas não deu.

Por exemplo, na entrevista relativa à tarefa "Uma ilha nos mares do sul" é possível verificar a observação de invariantes, na formulação e teste de uma conjectura, por parte deste aluno: "É assim stôra, para ver se a soma dava sempre a mesma. Com o ponto que a gente já tinha feito, mexíamos o ponto e víamos que o resultado dava sempre o mesmo embora as distâncias mudassem".

Relativamente às potencialidades do *GSP* para a formulação de conjecturas, Alberto refere as capacidades dinâmicas deste *software* como facilitadoras da formulação de conjecturas e respectivo teste: "O *GSP* ajuda imenso a fazer conjecturas. (…) aquilo também no *GSP* é fácil, agarra-se num vértice de um triângulo, puxamos um bocadinho e fazemos logo uns trezentos testes, com triângulos de várias dimensões" (Última entrevista, Junho 2004). Também durante a aula de discussão da segunda tarefa e a propósito de uma conjectura, Alberto referiu tê-la testado através do arrastamento de alguns vértices: "Testei stôra, testei sim senhora, mexi alguns vértices".

A DEMONSTRAÇÃO E SUAS FUNÇÕES

No início deste estudo, Alberto identificava demonstração com explicação do procedimento para a resolução de um problema:

> (…) a gente quando está a resolver problemas e vamos corrigir ao quadro temos de explicar como é que as coisas acontecem que a stôra, quando a gente está no quadro, a stôra passa a ser uma aluna (risos) e a gente tem de explicar para a turma toda. (1ª entrevista, Novembro 2003)

No seu fim, a concepção de demonstração de Alberto corresponde a algo que valida ou não uma conjectura: "Uma demonstração matemática... É a prova de que algo está correcto ou errado" (Última entrevista, Junho 2004). Além disso, distingue perfeitamente conjectura de teorema: "Uma conjectura. É algo que nós pensamos ser verdadeiro, mas que não temos a certeza se é. É, digamos, uma ideia que a gente tem. Pensamos que algo seja verdadeiro mas não podemos afirmar que isso é verdadeiro sem antes fazermos uma demonstração (…) Teorema já foi demonstrado matematicamente e a conjectura não" (idem). Para ilustrar esta afirmação referiu-se ao Teorema de Pitágoras: "O Teorema de Pitágoras, por exemplo, já foi demonstrado, porque se não era a conjectura de Pitágoras" (idem).

Durante a realização das duas primeiras tarefas, Alberto ainda considera que as experiências realizadas no *GSP* demonstram as suas conjecturas. No final da aula de discussão da primeira tarefa, após a demonstração realizada por uma colega no quadro, manifesta não concordar que esta prove a sua conjectura para todos os triângulos, mas parece concordar com o argumento da colega, relativo à utilização de letras:

> **Alberto:** Porque existem montes de triângulos e tu não os fizeste aí todos. Tinhas de estar aí a fazer as contas e…
>
> **Lara:** Provámos para todos os triângulos equiláteros. Usámos letras, não usámos números.
>
> **Alberto:** Ah! Tens razão. Pois, tens razão.

Talvez o argumento da colega o tenha levado a considerar como melhores as demonstrações realizadas no quadro, mas não foi o suficiente para deixar de considerar que demonstrava conjecturas com as experiências que realizava no *GSP*, como ilustram os seguintes extractos do seu relatório desta mesma tarefa:

> Sim, tentei demonstrar as duas conjecturas que formulei, porque quis ter a certeza de que estavam correctas. Sim, consegui demonstrar as duas. Fi-lo com a ajuda do *GSP*.
>
> (…) apareceu uma das conjecturas que eu tinha formulado melhor justificada pela minha colega Lara e pela sua parceira (…) Essas conjecturas foram demonstradas pela minha colega Lara no quadro.

No relatório e na entrevista da segunda tarefa já identifica como demonstrações apenas as realizadas no quadro durante a aula de discussão: "Só demonstrei a primeira e a segunda [conjecturas]. Fi-lo com a ajuda da minha cabeça, com a ajuda do meu grupo e dos meus colegas de turma" (Relatório). No final deste estudo, Alberto nega completamente a possibilidade de se realizar uma demonstração com o *GSP*. Este serve para encontrar contra-exemplos e "serve para fazermos conjecturas. Não serve para fazermos teoremas" (Última entrevista, Junho 2004). Nem mesmo a resistência de uma conjectura a muitos testes faz com que a aceite como verdadeira:

> Não são os testes que dizem que uma conjectura é verdadeira ou falsa, penso que é a demonstração. Nós podemos fazer montes de testes para um triângulo e dar-nos sempre o que nós queremos, mas outro pode fazer um teste e dar o contrário do que nós queremos. (idem)

Por outras palavras, o convencimento obtido com as experiências realizadas no *GSP* sofreu alterações graduais ao longo do estudo, passando de 100%, inicialmente, para 50%, no final:

> A primeira vez que trabalhámos, a primeira vez que trabalhámos no *GSP* eu fiquei, assim que vi uma conjectura fiquei 100% convencido que ela era [verdadeira]. Depois de termos trabalhado com o *GSP* já várias vezes, já várias aulas, que trabalhámos com o *GSP*, já fui ficando cada vez menos convencido. Portanto agora cada vez que trabalho com o *GSP* fico 50% convencido, porque sei que depois através de vários testes posso conseguir encontrar um contra-exemplo, ou posso demonstrar que ela é falsa, não com os testes, mas com a demonstração. (idem)

Alberto também reconheceu a demonstração como validando os resultados para uma comunidade: "Só depois de fazer a demonstração em frente lá daqueles matemáticos todos inteligentes, só aí é que se pode afirmar que ela é um teorema" (Última entrevista, Junho 2004). No caso da sua sala de aula afirma o seguinte: "os matemáticos inteligentes… Ah somos nós. Nós é que demonstrámos, estivemos a tentar demonstrar" (idem).

Para além do papel de validação das conjecturas formuladas, Alberto ainda associa à demonstração outras três funções: explicação, desafio intelectual e compreensão. A função de explicação foi aquela a que atribuiu maior importância e identificou-a em todas as tarefas em que se realizaram demonstrações da veracidade de uma conjectura. Por exemplo, no relatório da primeira tarefa, esta foi a única função por si referida: "As demonstrações que foram feitas serviram para nós compreendermos melhor porque é que o que conjecturámos acontece".

O gosto em realizar demonstrações e o encarar a sua realização como um desafio pessoal é visível no seguinte extracto da entrevista relativa à tarefa "O quadrilátero de Varignon":

> É, porque, é assim, eu quero, sempre quis tentar chegar a uma demonstração, sem a ajuda de ninguém, tipo eu na última tarefa, não foi nesta, na outra, estive a tentar, mas como é que eu posso arranjar uma maneira de demonstrar isto sem nenhuma medida específica, como é que eu arranjo uma maneira de demonstrar.

No relatório da segunda tarefa Alberto refere, entre outras funções, que as demonstrações contribuíram para ele perceber o próprio conceito de demonstração:

> (…) para percebermos melhor o que é uma demonstração, porque eu, por exemplo, quando a professora nos disse que no trabalho sobre *A Vida e Obra de Pitágoras* tínhamos de incluir uma demonstração do seu Teorema eu não percebi muito bem o que era uma demonstração e agora, em parte por causa destas demonstrações, já percebo melhor o que isso é.

REFUTAÇÃO E DEMONSTRAÇÃO DE CONJECTURAS

Desde cedo Alberto percebeu a função de um contra-exemplo, como é visível na sua resposta à questão da professora, "O que é que é isso de um contra-exemplo?", aquando da utilização de um, no grupo turma:

> É um exemplo que demonstra que isso não acontece para todos os triângulos, no caso de ser uma conjectura formulada para um triângulo. Por exemplo, stôra. A gente formulou uma conjectura para o paralelogramo. Se arranjarmos um exemplo que mostra o contrário dessa conjectura. (2ª tarefa, Última aula)

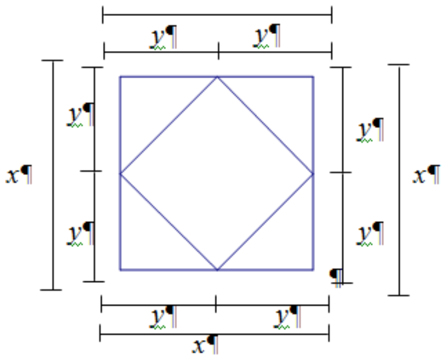
Alberto reconheceu a possibilidade de rejeitar as suas conjecturas recorrendo a contra-exemplos, que encontra com a realização de testes. Mas considerou mais fácil encontrar contra-exemplos na aula de discussão do que durante o trabalho com o *GSP*, pois são mais pessoas a pensar:

> São muitos a pensar e depois com a ajuda das conjecturas dos outros, assim ajuda-nos a pensar melhor e a ver: olha, isto não vai dar. Por exemplo, eu lembro-me de várias vezes, de uma ou duas vezes ter desmentido conjecturas que eu próprio formulei. Eu na 2ª feira, às vezes na 2ª feira eu tenho *x* conjecturas e uma conjectura eu acho que está bem e depois trago para a aula e com a ajuda deles descubro que aquilo não dá. (3ª entrevista, Março 2004)

Durante a discussão da tarefa “O quadrilátero de Varignon”, Alberto não demonstrou nenhuma conjectura, apenas o fez na aula posterior de 90 minutos, mas justificou a equivalência entre duas conjecturas, uma por si formulada e outra por colegas suas, como é visível no seguinte extracto da aula:

> **Alberto:** Não, espere aí, eu tenho aqui outra que é a mesma coisa. A área do quadrilátero interior multiplicada por dois dá a área do quadrilátero grande.
>
> **Professora:** Vamos registar?
>
> **Joana:** Eu fiz a mesma coisa mas ao contrário. Fiz o mesmo, mas ao contrário.
>
> **Professora:** Então é a mesma coisa. E querem registar aquela que o Alberto disse e depois vemos se é equivalente a alguma que já aqui tenha, ou querem ver já se está aqui alguma que diga a mesma coisa que o Alberto já disse?
>
> **Alberto:** Que a soma das áreas dos triângulos 1, 2, 3 e 4 é igual à área do quadrilátero interior.
>
> **Professora:** É a mesma coisa que dizer que a área do quadrilátero grande é o dobro do pequeno?
>
> **Lino:** Não, não é.
>
> **Alberto:** É a mesma coisa sim senhora.
>
> **Professora:** É a mesma coisa? É a mesma coisa porquê?
>
> **Alberto:** É a mesma coisa porque os triângulos ocupam o espaço que não está ocupado pelo quadrilátero.

Alberto realizou algumas demonstrações, embora sempre com a ajuda da professora. Revelou dificuldades não só em realizar, mas também em perceber as demonstrações dos colegas. Todavia, quando explicitamente questionado sobre as dificuldades sentidas nunca referiu a realização da demonstração, apesar de noutros momentos afirmar ter tentado demonstrar mas não ter conseguido. A redacção das demonstrações foi o aspecto mais problemático para Alberto. Apresenta-se a seguir a transcrição do processo de demonstração da conjectura "Quando unimos os pontos médios de lados consecutivos de um quadrado, os triângulos que obtemos são iguais", feita por este aluno, no quadro, no final deste estudo. A figura foi a professora que desenhou quando sugeriu aos alunos que demonstrassem outra conjectura relativa às áreas dos triângulos. As letras presentes na figura foram colocadas pelo Alberto quando foi ao quadro:



Se considerarmos cada medida do lado do quadrado *x*. Os pontos médios vão dividir um lado em duas partes iguais, que consideramos *y*. Sabemos também que o quadrado tem todos os ângulos iguais, de 90º. Portanto, se estes dois lados aqui são iguais, e o ângulo também (apontando na figura). Então, se os lados são todos iguais e os ângulos também são iguais, os triângulos são iguais (demonstração realizada oralmente pelo Alberto).

Perante a manifestação de incompreensão da parte de alguns colegas, a professora pediu a Alberto que esclarecesse qual o caso de igualdade de triângulos, o que este fez escrevendo de seguida LAL no quadro. Pediu-lhe ainda que esclarecesse melhor quais os lados e qual o ângulo iguais. Este repetiu, com pequenas alterações o que já havia dito, mas agora apontando sempre para a figura. Contudo, ainda manifestou sentir dificuldade em registar o que afirmara oralmente por duas vezes, pelo que a professora se disponibilizou para ir registando no quadro, à medida que este repetia, a demonstração.

Joana

Joana é uma jovem de 13 anos, curiosa, questionadora e participativa, mas do seu lugar, pois não gosta de ir ao quadro. Gosta de desafios e é boa aluna à generalidade das disciplinas. À sua disciplina preferida, a Matemática, tem Nível 5 desde o 5.º ano. Não sente dificuldades a Matemática e gosta de tudo o que aprende nesta disciplina: "não há nada na Matemática que eu não goste" (1ª entrevista, Novembro 2003). Para Joana tudo o que aprende em Matemática é importante, contudo esta disciplina não é mais importante que as outras, "se não nós não teríamos as outras disciplinas se esta fosse a mais importante" (idem). A Matemática, para si, "é tudo aquilo que trabalha com números" (Última entrevista, Junho 2004) e que "está no nosso dia a dia. Nós para tudo usamos os números (…) Serve para nos ajudar no nosso dia a dia. Sem a Matemática não fazíamos quase nada." (idem)".

Esta aluna prefere o trabalho em grupo ao trabalho individual, uma vez que nesse tipo de trabalho é possível discutir e confrontar ideias. Do trabalho de grupo, a sua preferência vai para o grupo turma, precisamente porque esse confronto e discussão de ideias são mais alargados: "porque é diferente, podemos discutir uns com os outros, confrontar as conjecturas, as ideias. Podemos ajudar uns aos outros a rejeitar ou não as conjecturas. É diferente, é mais gente" (5ª entrevista, Maio 2004).

Joana tem uma boa relação com o computador em geral e com o *GSP* em particular. Não sente dificuldades em trabalhar com este programa que, na sua opinião, "torna mais fácil a aprendizagem da geometria" (1ª entrevista, Novembro 2003), poupa tempo e é rigoroso: "Quando fazemos à mão perdemos mais tempo porque temos de medir tudo correctamente, os ângulos. E com o *Geometer´s Sketchpad* já não. Nós damos os dados e ele automaticamente faz aquilo" (idem). Todavia, nem tudo é possível aprender com o *GSP*: "certas coisas que não se aprendem a fazer [se não o fizermos] sem o computador, sem aquele programa".

Formulação e teste de conjecturas

Joana, desde o início deste estudo, manifestou compreender o significado de conjectura e o processo da sua formulação. Para esta aluna, uma conjectura é algo que pode ser verdadeiro, mas sobre a qual não possuímos certezas: "Uma conjectura é algo que nós não temos a certeza, algo que supomos que seja assim, [que surge] observando factos" (1ª entrevista, Novembro 2003). No final do estudo, refere obter essa certeza com a demonstração:

> É algo que nós pensamos verdadeira, mas que ainda não temos a certeza que é. Às vezes podemos ter quase a certeza, mas sem uma demonstração ainda não há essa certeza, [e surgem quando] nós observamos algumas coisas e vemos que se verifica para muitos casos. (Última entrevista, Junho 2004)

Nesta altura formula "a conjectura para todos, mas ainda não sabemos se é para todos ou não e por isso é só conjectura". É aqui também visível que Joana percebe o carácter geral de uma conjectura. A observação de relações que se mantêm invariantes, após várias experiências com o *GSP*, constitui uma condição essencial de partida para Joana formular conjecturas. O seguinte diálogo com um colega aquando da realização da segunda tarefa é elucidativo do que se acabou de afirmar:

> **Joana:** É assim. Esse valor. O valor do quociente não te serve de nada. Porque quando mudas o lado muda tudo.
>
> **Lino:** É a dividir. Acho que é a dividir o lado AB pelo lado BD.
>
> **Vânia:** Ele passou do computador com aquela medida e devias ter experimentado mexer.
>
> **Joana**: Ao mexeres o valor vai mexer também. Esse valor não tem nada fixo. Não tem nada relacionado com outra coisa. Porque, ao mudares a forma da figura isso muda. (2ª tarefa, 2ª aula)

Joana tenta explicar ao colega que para formular uma conjectura não basta fazer um cálculo e obter um valor. Esse valor tem que se manter fixo quando o restante muda ou tem que manter alguma relação fixa com "outra coisa". Perante a insistência do colega em repetir o que fez sem dar mostras de compreender ao que a Joana se refere, esta exemplifica:

> **Joana:** Sim, mas se tu mudas. Isto está assim, mas eu posso fazer isto e a figura fica normal. E isso aí vai mudar.
>
> **Lino:** Não, mas o que eu fiz é um…
>
> **Joana:** Eu posso pôr estes quatro lados do mesmo tamanho. Posso pôr estes dois mais pequenos do que estes. E isto vai mudar tudo e não há nenhuma relação fixa.
>
> **Lino:** Ou seja, o que eu fiz foi dividir este lado por este e deu-me um resultado.
>
> **Joana:** Só que esse resultado não é fixo. Não arranjas uma relação que seja sempre fixa. (2ª tarefa, 2ª aula)

Quando o colega apresenta uma outra suposta conjectura, Joana reforça a sua ideia e diz-lhe uma conjectura relacionada com os mesmos objectos matemáticos, os ângulos, insistindo na necessidade de se observar algo fixo:

> **Lino:** O ângulo BAC, ou seja, este aqui.
>
> **Joana:** O ângulo A. O BAC é o ângulo A.
>
> **Lino:** É. E o ACD é agudo.
>
> **Joana:** Tal e qual. O ACB e o ABD são iguais. E BAC e o BDC são iguais. Mas essa parte de serem agudos ou obtusos… Tu mudas a forma da figura e eles mudam também. Percebes, é essas coisas que não são fixas (ênfase no final). (2ª tarefa, 2ª aula)

Não se notou da parte de Joana um evoluir na redacção das conjecturas, pois esta escrevia sempre apenas a conclusão que obtinha, não incluindo as condições (hipóteses) em que esta era tirada. Talvez não o fizesse por considerar que a figura, que apresentava sempre no relatório, fosse suficiente para clarificar a conjectura. Para formular e testar as suas conjecturas, Joana tira partido das potencialidades do *GSP*, em termos de construção e manipulação de objectos para obter outros com as mesmas características. Tal é visível na seguinte fala de Joana aquando da realização da primeira tarefa: "Estás a ver este ponto aqui? Estás a ver o que é isto? Isto é a distância a cada um dos lados. Isto é a soma destas três distâncias. Por mais que tu mexas o ponto, por mais que tu mexas o ponto não mexe e se saíres para fora ele mexe. Porquê?" (Aula no *GSP*). Durante a realização da quarta tarefa no *GSP*, para além da forma como Joana formula as suas conjecturas, também é perceptível que manifesta satisfação nessa formulação procurando formular várias conjecturas: "Mexe os lados. Mede os lados todos. De um dos lados. Não é desse, é desse. Tira o ponto. Observa este lado e agora aquele lado. Espectacular"; "Oh, stôra dê aí mais sugestões para o pessoal investigar". Esta última intervenção da Joana teve lugar mesmo no final da aula.

Joana manifestou ainda reconhecer como potencialidades do *GSP*, para a formulação de conjecturas, o rigor, a facilidade de construção e a rapidez:

> É mais fácil nós vermos alguma coisa no *GSP* do que se, por exemplo, desenhar polígonos e medir é mais fácil no *GSP* do que fazer isso à mão, dá muito mais trabalho [à mão]. Por isso, vemos logo os resultados e é mais fácil comparar porque ajuda mais facilmente a fazer as conjecturas. Porque é mais fácil chegarmos ao resultado, uma vez que temos de ser nós a medir, o próprio *GSP* faz isso mais rapidamente. É mais rigoroso. Penso que é um bocadinho mais rigoroso do que nós. Nós às vezes deixamos escapar um milímetro ou uma coisa assim e o *GSP* não. (Última entrevista, Junho 2004)

A DEMONSTRAÇÃO E SUAS FUNÇÕES

A concepção de demonstração de Joana no início deste estudo estava exclusivamente ligada à função de validação: "é provar que é mesmo verdade" (1ª entrevista, Novembro 2003).

Ao longo do estudo, Joana faz referências à demonstração, nomeadamente em relação ao seu carácter geral e conteúdo. Por exemplo, afirma ter realizado uma demonstração porque: "pelas expressões que utilizámos, não utilizámos números, utilizámos letras que servem para todos os triângulos. Cada uma daquelas letras pode ser encarada como um número qualquer" (2ª entrevista, Janeiro 2004).

Joana, no final do estudo, distingue claramente conjectura de teorema: "um teorema é uma coisa que já está demonstrada, por alguém. E uma conjectura é uma coisa que nós temos, podemos ter quase a certeza, mas ainda não está demonstrado" (Última entrevista, Junho 2004).

Durante a última entrevista, o seu comentário à afirmação "O *GSP* dá para fazer demonstrações matemáticas" revela que Joana ainda tem dúvidas relativamente à construção de uma demonstração: "Dar dá. Mas temos na maioria dos casos, temos de saber mais qualquer coisa e também de usar, de saber as opções do que é que podemos fazer com o *GSP*". Apesar de já ter encontrado vários contra-exemplos para mostrar que uma conjectura é falsa Joana diz: "demonstrações no *GSP*, ainda não fiz nenhuma". Ela tem dúvidas se o *GSP* poderá mesmo realizar uma demonstração: "Só o *GSP*... não sei. Acho que não". Porém, pensa "que aquela história de fazer muitas experiências podia ajudar", mas não considera que as experiências possam, por si só, constituir uma demonstração, o que é visível no seu comentário à afirmação "Esta conjectura é verdadeira, porque resistiu a muitos testes no *GSP*":

> **Joana:** Não, isso nem sempre é assim. Lá por ter resistido a muitos testes no *GSP* não quer dizer que seja verdadeira. Foi o caso, depois quando a stôra mudou as definições do *GSP*, isso foi um dos casos. Antes tinha resistido a todos os testes e mais alguns que nós fizéssemos, mas no fim, depois até o próprio *GSP* mostrou que aquilo não era verdadeiro.
>
> **Entrevistadora:** Ah! Mostra que era falso, não foi. Então portanto, não concordas com…
>
> **Joana:** Não. Porque também resistir a todos os testes do *GSP* não é nenhuma demonstração. Não provamos que a conjectura é verdadeira. (idem)

Assim, as experiências que Joana realiza no *GSP* fornecem-lhe um convencimento muito elevado sobre as conjecturas que formula, acreditando na sua veracidade. Porém, esse convencimento não é absoluto. Ela só fica 100% convencida da veracidade de uma conjectura com a demonstração: "só as experiências não nos dão nenhuma demonstração. Para dizermos que aquilo realmente é um teorema, que já está mesmo demonstrado. Só com as experiências não fica nada demonstrado" (idem).

A função de validação da demonstração é referida pela Joana em todas as tarefas e em todos os documentos analisados. Além disso, a validação não é só para si, mas para todas as pessoas, como ilustra uma sua afirmação na entrevista relativa à segunda tarefa:

> Se quisermos dizer o mesmo a outra pessoa temos a certeza do que estamos a dizer e se a pessoa nos quiser trocar as voltas com outra pergunta como nós temos uma demonstração e sabemos aquilo que estamos a dizer podemos dar a volta a isso.

Na primeira tarefa, para além desta função, Joana refere ainda a função de explicação. Quando questionada sobre a principal função da demonstração respondeu "perceber o porquê". Joana reforça esta ideia na resposta sobre o seu convencimento após muitas experiências: "Fiquei [convencida]. Mas fiquei... queria saber o porquê. Porque só com aquilo eu não conseguia saber o porquê." Considerou que a demonstração teve interesse para perceber "o porquê e ficar mesmo convencida que aquilo era mesmo verdade." (2ª entrevista, Janeiro 2004). Também na aula de discussão desta tarefa manifestou, logo no início, sentir a necessidade de uma demonstração para saber o porquê: "Exactamente. Eu estou convencida, mas não sei porquê." A necessidade de uma explicação parece ter-se devido ao facto da principal conjectura[4], formulada aquando da realização desta tarefa, traduzir uma ideia inesperada, como é visível no seguinte extracto do seu trabalho na aula com o *GSP*, mesmo antes de a formular:

> **Joana (ao longe):** Oh stôra, esta porcaria não muda a soma!
>
> (…)
>
> **Joana:** Já me estou a passar.
>
> **Professora (para os alunos ao lado):** Experimenta lá a sair para fora. Ele está-te a actualizar
>
> **Joana:** Ah!

[4] Numa ilha com a forma de triângulo equilátero a soma das distâncias de qualquer local aos lados da ilha é sempre igual

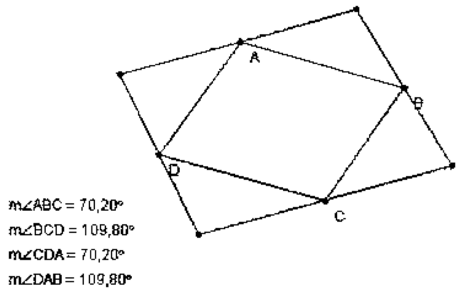
Professora (para os alunos ao lado): Então qual é o melhor ponto para construir a casa?

Joana: É qualquer um. Desde que seja dentro do triângulo.

Refutação e demonstração de conjecturas

Joana percebeu desde o início que os contra-exemplos serviam para rejeitar as conjecturas e utilizou-os em todas as que rejeitou. Na quarta tarefa passa a referir o contra-exemplo como estando nas condições da figura:

> A conjectura rejeitada por nós foi "O quadrilátero interior é um rectângulo", porque os rectângulos têm os ângulos rectos e como se pode ver na figura da página seguinte, **com estas condições**, isso pode não acontecer (Negrito acrescentado).



O facto de a professora, na terceira tarefa, ter destacado a importância do contra-exemplo verificar as condições iniciais da conjectura, as hipóteses, pode ter contribuído para Joana ter escrito e destacado "com estas condições". Na aula com o *GSP*, Joana rejeitou a conjectura anterior medindo os ângulos, pois, na sua formulação, deve ter tido em conta apenas o facto de o rectângulo ter os lados opostos iguais e esquecido o facto de os ângulos terem de medir 90º:

Joana: Os ângulos, onde é que estão os ângulos? Eh, não medi os ângulos. Mas não me parece que tenham 90º.

Professora: Isso já foi uma conjectura que tu formulaste, não te esqueças de escrever. Agora vais testá-la.

Joana: Está bem, stôra, mas não têm 90º. Não me parece que tenham 90º.

(Vão medir os ângulos)

Joana: Stôra, rejeitámos porque os ângulos não são de 90º.

Joana tenta realizar as demonstrações por sua iniciativa, mas não consegue, com os seus colegas de grupo, vencer as dificuldades. Essas dificuldades prendem-se com o início da demonstração e com a organização dos vários resultados que sabe e que pode eventualmente usar para a sua realização. Por exemplo, na entrevista da segunda tarefa afirmou ter necessitado da ajuda da professora para iniciar uma demonstração: ”No início da demonstração. Não sabíamos como é que havíamos de pegar naquilo, foi preciso a sua ajuda” (idem). Acrescenta ainda a dificuldade de organização das várias informações de que dispõe: “às vezes não sabemos bem, temos várias coisas… Não saber organizar as coisas também complica tudo”. Na entrevista relativa à última tarefa, reafirma que não consegue demonstrar porque não sabe quais os resultados a utilizar: “porque ando sempre à volta do mesmo, não me lembro de outros resultados para usar. Depois no fim quando acaba por ser demonstrado acabo por ver que me esqueci de ir buscar aquele resultado que no fim foi usado”.

Porém, esta aluna compreendeu as demonstrações apresentadas e contribuiu mesmo para a realização de algumas. Sozinha apenas conseguiu demonstrar alguns resultados que eram imediatos a partir de outros. Apenas numa aula posterior, relativa à última tarefa, demonstrou, sem qualquer ajuda, uma conjectura. Embora tivesse manifestado dificuldade em redigir a demonstração fê-lo como se apresenta a seguir:

Conjectura:

(Se unirmos os pontos médios dos lados consecutivos de 1 quadrado qualquer obtemos um quadrado)

O quadrilátero interior é um quadrado pk ( ) os Δs são tds =s e o quadrilátero é formado pelas hipotenusas dos Δs, e a soma dos ∡s internos de 1 Δ é de 180°, se estes são Δs rectângulos, 1 dos ∡s é de 90°, logo os outros 2 ∡s têm k medir no total 90° e como os lados iguais ∡s opostos são iguais, logo cada 1 mede 45°.

No vértice da figura interior com (~~fig~~) o quadrilátero exterior forma-se um ∡ de 180° e se retirarmos 45° de cada lado (estes ∡s são dos Δs formados, que são iguais) os ∡s da figura interior são de 90°.

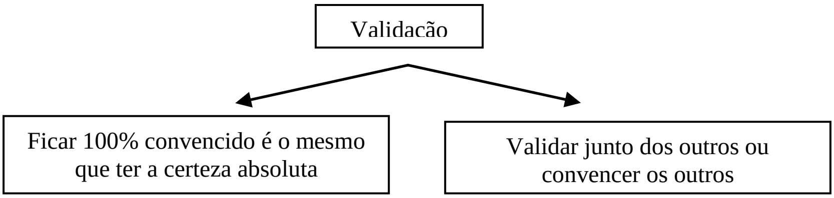
CONCLUSÃO

Este estudo aponta para a complexidade e a exigência da capacidade de demonstração matemática, entendida como o processo de descoberta e de formulação de conjecturas, a compreensão do que é uma conjectura, uma demonstração e um teorema, e a produção de demonstrações matemáticas. Em particular, quanto à natureza das conjecturas, Joana desde o início do estudo mostrou compreender o seu carácter geral, percebendo que através da observação de diversos casos particulares formulava conjecturas, que diziam respeito a leis gerais. Já no caso de Alberto, só na última tarefa é claramente visível que já compreende o carácter geral de uma conjectura.

Foi possível identificar como processos de formulação de conjecturas o raciocínio por analogia, um dos instrumentos da indução referidos por Polya (2003), e a observação de invariantes, referida por Veloso (1998) como o paradigma da utilização de *software* de geometria dinâmica. Foram apontadas pelos alunos caso como potencialidades do *GSP* para a formulação e teste de conjecturas: (i) o rigor e a facilidade de construção; (ii) o permitir realizar muitas experiências rapidamente; e (iii) a sua utilidade para arranjar contra-exemplos ou para confirmar as conjecturas.

No final do estudo, ambos os alunos mantêm o carácter incerto de uma conjectura, referindo-a, agora, como algo que se pensa verdadeiro, mas que só pode assim ser considerado após a sua demonstração, passando então a chamar-se teorema. Esta distinção clara entre conjectura e teorema é um aspecto que, entre outros, faz parte das competências a desenvolver ao longo do ensino básico (DEB, 2001). O conceito de demonstração destes alunos vai ao encontro da prova prática referida por Hersh (1997), ou seja, "a prova matemática prática é o que nós fazemos para os outros acreditarem nos nossos teoremas" (p. 49). Pode dizer-se que, quer Joana, quer Alberto mostraram "predisposição para raciocinar matematicamente" (DEB, 2001, p. 57). Consideraram a demonstração importante desde o início, apesar de obterem um forte convencimento a partir das experiências que realizavam com o *GSP*, confirmando o referido por De Villiers (1999, 2001, 2003), Barbosa (2002) e Mudaly (Mudaly & De Villiers, 2000).

Entre as funções da demonstração identificadas por estes alunos, a de validação foi mais referida no final do estudo do que inicialmente. Para tal, pode ter contribuído o discurso da professora e a realização da terceira tarefa onde os alunos foram confrontados com um contra-exemplo para uma conjectura de cuja veracidade não duvidavam, ideia esta também expressa por De Villiers (1999). Qualquer um dos alunos identifica, no final do estudo, a obtenção de 100% de convencimento com a demonstração. Ou seja, este convencimento só é obtido com a validação que a demonstração confere a uma conjectura. Esta função foi identificada pelos alunos, assumindo duas componentes, uma relativa à validação para si próprio e outra à validação para os outros, que se traduzem no esquema seguinte:



A identificação destas duas componentes é um aspecto não referido nos estudos analisados, em particular o que se prende com o carácter social da demonstração. Pensa-se que tal pode dever-se ao facto de a comunidade sala de aula ter desempenhado um papel crucial na aceitação das demonstrações realizadas, tal como acontece na comunidade dos matemáticos (Ernest, 1994; Hersh, 1997).

Apesar de no final do estudo, ambos os alunos rejeitarem as experiências com o *GSP* como demonstrações, apresentavam ainda dificuldades na sua realização, nomeadamente em saber que resultados usar, e na sua redacção. Este último aspecto foi o mais problemático até ao final do estudo, mas foi também aquele, que conquanto mais complexo, registou uma maior evolução da parte de ambos os alunos. A complexidade do processo demonstrativo foi identificada por Joana quando referiu ter dificuldades em demonstrar visto este exigir não só a mobilização de conhecimentos, mas também uma sólida articulação entre estes. Note-se que nunca foi dado qualquer documento escrito que orientasse a realização das demonstrações, nem apresentado qualquer modelo formal de demonstração. Eram sim dadas sugestões, a pedido dos alunos, à medida que avançavam nos seus raciocínios. As demonstrações realizadas por estes alunos fizeram uso do método directo e do contra-exemplo.

Embora se considere que a capacidade de demonstração matemática está intimamente ligada a diversos factores, como as tarefas propostas, o papel do professor e o ambiente da sala de aula, os resultados obtidos neste estudo apontam igualmente para a importância da utilização do *GSP*, indo ao encontro do referido por Hanna (2000), pois, como também os alunos reconheceram, o *GSP* permite a realização de muitas experiências num curto espaço de tempo, o que favorece a formulação de conjecturas e respectivo teste. No entanto, pensa-se que este *software* tem de ser utilizado como um pano de fundo que fomente a confrontação de ideias fundamentadas. Por exemplo, Alberto, apesar de inicialmente considerar as suas conjecturas demonstradas com as experiências realizadas no *GSP*, mudou de opinião e no final do estudo rejeitava completamente esta possibilidade. Para tal, poderá ter contribuído a forma como as conjecturas eram sujeitas a discussão na turma. As conclusões deste estudo estão igualmente na linha das orientações curriculares actuais (NCTM, 2000; DEB 2001) e da opinião de diversos autores (Ponte & Canavarro, 1997; Abrantes, *et al*. 1999; Garry, 2003; Keyton, 2003) que salientam a utilização deste tipo de *software* como trazendo mais valias para a realização de tarefas de investigação, e em particular para a demonstração.

Salienta-se que a demonstração não pode ser vista como um fim, mas sim como um meio rico de aprendizagem. A sua presença na sala de aula pode e deve contribuir para o desenvolvimento da capacidade de demonstração matemática. Os resultados obtidos evidenciam que qualquer um dos alunos desenvolveu a sua capacidade de demonstração matemática, com um maior destaque para Alberto que se encontrava num patamar mais baixo, quando do início do estudo. Alberto possuía uma classificação a Matemática inferior à de Joana, porém isto não o impediu de no final do estudo estar muito próximo desta, mesmo ao nível da produção de demonstrações. Para tal, poderá ter contribuído o seu gosto pela Matemática e por desafios. Todavia, importa destacar que a capacidade de demonstração matemática foi entendida neste estudo como algo mais que deduzir uma determinada conclusão partindo de premissas verdadeiras e usando outros resultados aceites como verdadeiros. Esta inclui igualmente a compreensão do que é uma conjectura, uma demonstração e um teorema, e ainda o processo de descoberta que abarca a formulação de conjecturas. Dos aspectos aqui referidos como fazendo parte da capacidade de demonstração matemática pode afirmar-se que o relativo à dedução de uma conclusão a partir de premissas foi o menos conseguido por estes alunos. Por isso seria pertinente acompanhar uma turma até ao fim do 3.º ciclo, para tentar observar a sua evolução, dada a complexidade do tema estudado e a evolução que foi possível observar neste estudo. Donde, sugere-se a realização de estudos longitudinais envolvendo a mesma temática e o mesmo contexto. A realização de outros estudos, agora com alunos com outro aproveitamento escolar a Matemática e com uma atitude menos positiva face a esta disciplina poderia constituir uma outra orientação para o prosseguimento de estudos sobre a capacidade de demonstração matemática dos alunos. Poderá também o *GSP* constituir para estes alunos um factor de motivação e um contributo significativo para o desenvolvimento da sua capacidade de demonstração matemática?

REFERÊNCIAS

Abrantes, P., Serrazina, L. & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na educação básica*. Lisboa: Ministério da Educação. (Retirado de http://www.deb.min_edu.pt/curriculo/Reorganizacao_Curricular/reorgcurricular_publicacoes.asp, em 10/5/2001)

Bardin, L. (1977). *Análise de conteúdo*. Lisboa: Edições 70.

Barbosa, A. (2002). *Geometria no plano numa turma do 9º ano de escolaridade: uma abordagem sociolinguística à teoria de Van Hiele usando o computador* (tese de mestrado, Universidade do Porto). Lisboa: APM.

Boavida, A. (2001). Um olhar sobre o ensino da demonstração em Matemática. *Educação e Matemática*, *63*, 11-15.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Brocardo, J. (2001). *As investigações na aula de Matemática: Um projecto curricular no 8.º ano* (tese de doutoramento, Universidade de Lisboa). (Retirado de http://ia.fc.ul.pt/, em 5/11/2004)

Chaitin, G. (2003). *Conversas com um matemático*: *Matemática, arte, ciência e os limites da razão*. Lisboa: Gradiva.

Davis, P. J. & Hersh, R. (1995). *A Experiência Matemática*. Lisboa: Gradiva.

DEB (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico – Competências Essenciais.* Lisboa: Ministério da Educação. (Retirado de http://www.deb.min_edu.pt/curriculo/Reorganizacao_Curricular/reorgcurricular_publicacoes.asp, em 10/05/2002)

DGEBS (1991). *Organização curricular e programas, Ensino Básico. 3ºciclo* (I). Lisboa: Ministério da Educação.

DEE (1999). *The National Curriculum for England: Mathematics*. NC online version. (Retirado de *http://www.nc.uk.ne*, em 10/11/2004)

De Villiers, M. (1999). *Rethinking proof with Geometer´s Sketchpad*. EUA: Key Curriculum Press.

De Villiers, M. (2001). Papel e funções da demonstração no trabalho com o *Sketchpad*. *Educação e Matemática*, *63*, 31-36.

De Villiers, M. (2003). O papel da demonstração na investigação em Geometria realizada em computador: algumas reflexões pessoais. In E. Veloso e N. Candeias (Orgs.), *Geometria Dinâmica*: *selecção de textos do livro Geometry Turned On!* (pp. 31-43). Lisboa: APM.

Ernest, P. (1994). The dialogical nature of mathematics. In Paul Ernest (Ed.), *Mathematics, education and philosophy* (pp. 33-48). Hampshire: The Falmer Press.

Fonseca, L. (2004). *Formação inicial de professores de matemática: a demonstração em geometria* (tese de doutoramento, Universidade de Aveiro).

Garry, T. (2003). *The Geometer's Sketchpad* na sala de aula. In E. Veloso e N. Candeias (Orgs.), *Geometria Dinâmica*: *selecção de textos do livro Geometry Turned On!* (pp. 69-78). Lisboa: APM.

Guimarães, H. (2003). *Concepções sobre a Matemática e a actividade matemática* (tese de doutoramento, Universidade de Lisboa).

Hadas, N., Hershkowitz, R. & Schwarz, B., B. (2000). The role of contradiction and an uncertainty in promoting the need to prove in dynamic geometry environments. *Educational Studies in Mathematics*, *44*(1-2), 127-150.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An Overview. *Educational Studies in Mathematics, 44*(1-2), 5-23

Healy, L. & Hoyles, C. (2000). A study of proof Conceptions in Algebra. *Jounal for Research in Mathematics Education*, *31*(4), 396-428.

Hersh, D. (1994). Fresh breezes in the philosophy of mathematics. In Paul Ernest (Ed.), *Mathematics, education and philosophy* (pp. 11-20). Hampshire: The Falmer Press.

Hersh, D. (1997). *What is mathematics really?* New York: Oxford University Press.

Hoyles, C. & Küchemann, D. (2002). Student´s understanding of logical implication. *Educational Studies in Mathematics, 51* (3), 193-223.

Jones, K. (2000). Providing a foundation for deductive reasoning: students' interpretations when using dynamic geometry software and their evolving mathematical explanations. *Educational Studies in Mathematics*, *44*(1-2), 55-85.

Junqueira, M. M. (1995). *Aprendizagem da geometria em ambientes computacionais dinâmicos: Um estudo no 9º ano de escolaridad*e (tese de mestrado, Universidade Nova de Lisboa).

Keyton, M. (2003). Alunos descobrem a geometria usando *software* de geometria dinâmica. In E. Veloso e N. Candeias (Orgs.), *Geometria Dinâmica*: *selecção de textos do livro Geometry Turned On!* (pp. 79-86). Lisboa: APM.

Machado, S. (2005). *A demonstração matemática no 8*.º *ano no contexto de utilização do Geometer´s Sketchpad* (tese de mestrado. Universidade de Lisboa).

Mariotti, M., A. (2000). Introduction to proof: the mediation of a dynamic software environment. *Educational Studies in Mathematics, 44*(1-2), 25-53.

Marques, M. (2004). *As investigações matemáticas no ensino-aprendizagem da geometria* (tese de mestrado, Universidade da Beira Interior).

Marrades, R. & Gutiérrez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics, 44*(1-2), 87-125.

Mota, J. (2004). *O Geometer´s Sketchpad e o ensino/aprendizagem da geometria: um estudo em duas turmas do 9º ano de escolaridade numa escola dos Açores* (tese de mestrado, Universidade dos Açores).

Mudaly, V. & De Villiers, M. (2000). Learners' needs for conviction and explanations within the context f dynamic geometry. *Pythagoras, 52*, 20-23. (Retirado de http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/vim.pdf, em 5/11/2004)

NCTM (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em Matemática escolar*. Lisboa: APM & IIE. (Trabalho original em inglês, publicado em 1989).

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston: NCTM.

Polya, G. (2003). *Como resolver problemas*. Lisboa: Gradiva.

Polya, G. (1990). *Mathematics and Plausible Reasoning* (Vol. I – Induction and analogy in mathematics). Princeton: Princeton University Press.

Ponte, J. P., Boavida, A. M., Graça, M. & Abrantes, P. (1997). *Didáctica da Matemática.* Lisboa: Editorial do Ministério da Educação.

Ponte, J. P. & Canavarro, P. (1997). *Matemática e novas tecnologias*. Lisboa: Universidade aberta. (Cap. 3 e 4). (Retirado de http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/mem/bibliografia.htm, em 15/10/2002)

Rocha, A. (2003). *Uma experiência com actividades de investigação na Aula de Matemática: Competências matemáticas, atitudes e concepções de dois alunos do 7º ano de escolaridade* (tese de mestrado, Universidade do Porto). (Retirado de http://ia.fc.ul.pt/ em 5/11/2004)

Scher, D. (1999). Problem solving and proof in the age of dynamic geometry. *Micromath, 15* (1), pp. 24-30. (Retirado de http://www.addr.com/~dscher, em 6/12/2004)

Stewart, I. (1995). *Os problemas da matemática*. Lisboa: Gradiva.

Teixeira, A. (2004). *Tarefas de investigação matemática no currículo do 7º ano do 3º ciclo do ensino básico* (tese de mestrado, Universidade da Beira Interior).

Veloso, E. (1998). *Geometria: temas actuais*. Lisboa: IIE.

Yin, R. K. (2003). *Case study research: Design and methods* (3.ª ed.). London: Sage publications.

ANEXO. TAREFAS

UMA ILHA NOS MARES DO SUL

Um milionário "surfista" comprou uma ilha nos mares do sul em forma de triângulo equilátero. Como cada um dos lados da ilha é uma praia óptima para fazer "surf", ele pretende construir uma casa num ponto tal que a soma das distâncias da casa às três praias seja a mínima possível. Isto para que o conjunto das três estradas a abrir no arvoredo tropical custem o menos possível – é milionário mas é poupado. Em que posição da ilha deve construir a casa?

- Para decidirem qual o ponto onde a casa deve ser construída abram o sketch **equilátero**. O triângulo aí construído é equilátero.
- Marquem um ponto no interior do triângulo e meçam a sua distância a cada um dos lados do triângulo.
- Somem as três distâncias obtidas.
- Qual é afinal o melhor ponto para construir as estradas? Têm a certeza? Porquê?

ADAPTADO DE DESAFIOS 2[5]

PROPRIEDADES DOS PARALELOGRAMOS (1)

Considerando que um paralelogramo é um quadrilátero que tem dois pares de lados opostos paralelos, vão investigar propriedades dos paralelogramos

Abram o sketch paralelogramo, onde vão encontrar um paralelogramo.

Explorem o paralelogramo e formulem conjecturas a partir das observações que fizerem. Podem, por exemplo, medir a amplitude dos ângulos e o comprimento dos lados, traçar as diagonais do paralelogramo, etc. O que observam é válido para todos os paralelogramos? Porquê?

---

[5] Veloso, E. & Viana, J. P. (1992). *Desafios 2*. Porto: Edições afrontamento

Propriedades dos paralelogramos (2)

1. Comparem as conjecturas que formularam na aula anterior com as dos vossos colegas e façam uma lista de todas as conjecturas formuladas (por todos vós).

2. As conjecturas que formularam são verdadeiras? Porquê? É necessário fazer alguma demonstração para terem a certeza? Encontram outro motivo qualquer para fazer uma demonstração? Registem as vossas respostas.

Propriedades dos paralelogramos (3)

Tentem demonstrar as vossas conjecturas, utilizando os casos de igualdades de triângulos (LLL, LAL e ALA) e as propriedades dos ângulos de lados paralelos. Podem também utilizar as conjecturas que entretanto forem demonstrando (teoremas) para demonstrar outras.

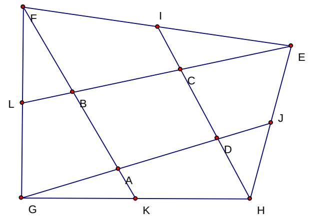
Quadriláteros, pontos médios e vértices

1. No ambiente de trabalho abram o sketch quadrilátero.

   Os pontos I, L, K e J são os pontos médios dos lados do quadrilátero [GHEF]. Obteve-se o quadrilátero [ABCD] unindo os pontos médios dos lados do quadrilátero [GHEF] aos seus vértices, conforme mostra a figura.

   Investiguem o que se passa quando efectuam a divisão da área do quadrilátero menor pela área do quadrilátero maior. Registem todas as conjecturas que formularem.

2. As conjecturas que formularam são válidas para todos os quadriláteros nas condições acima descritas? Porquê?



O QUADRILÁTERO DE VARIGNON

- Investiguem, para diversos quadriláteros, o que se passa quando unem os pontos médios de lados consecutivos de um quadrilátero. Com base nas experiências que fizeram, formulem conjecturas que digam respeito à figura obtida a partir da união dos pontos médios de lados consecutivos de um quadrilátero qualquer.

- As conjecturas que formularam são válidas para todos os quadriláteros nas condições acima descritas? Porquê?

A Demonstração Matemática no 8.º Ano no Contexto de Utilização do *Geometer's Sketchpad*

Resumo

Este artigo baseia-se num estudo que pretendia estudar a capacidade de demonstração matemática de alunos do 8.º ano de escolaridade, num contexto de utilização do *software Geometer´s Sketchpad*.

A metodologia de natureza qualitativa interpretativa recorre a estudos de caso. A recolha de dados serve-se da observação com registo áudio e vídeo de aulas, de entrevistas semi-estruturadas gravadas em áudio, de documentos produzidos pelos alunos e do diário de bordo da investigadora. A análise baseia-se em categorias definidas a posteriori, orientada pelas questões do estudo e pelo quadro de referência teórico.

Na formulação e teste de conjecturas, os alunos recorrem ao raciocínio por analogia e à observação de invariantes. Identificam como funções da demonstração, a validação, a explicação, o desafio intelectual e a compreensão do seu significado. No final do estudo, a demonstração surge-lhes como algo que valida o conhecimento matemático não só para si, mas também para a comunidade sala de aula. Apresentam dificuldades na realização das demonstrações, nomeadamente em saber que resultados usar e na sua redacção (aspecto mais problemático até ao final). As demonstrações realizadas apelam ao método directo e ao contra-exemplo. A sua aceitação depende de todos os elementos presentes na comunidade sala de aula.

Palavras-chave: Aprendizagem; formulação de conjecturas; teste de conjecturas; demonstração de conjecturas; investigações matemáticas; *Geometer´s Sketchpad*.

Mathematical proof in the 8th grade in a Geometer's Sketchpad setting

Abstract

This article is based in a study that intends to study the capacity on mathematical proofs of 8th grade students, using the software *Geometer´s Sketchpad.*

The interpretative and qualitative methodology use case studies. Data collection resorts to observation with audio and video records of lessons, to semi-structured audiotape interviews, to documental analysis of artefacts made by the students, and to a log book of the research. The data analysis is based on categories defined a posteriori, guided by the study's issues and the theoretical framework.

In the formulation and testing of conjectures, the students use reasoning by analogy and observation of invariant. They identify validation, explanation, intellectual challenge and comprehension of meaning as the main functions of proof. At the end of the study, proof emerges as something that validates the mathematical knowledge, not only for each student, but also for the classroom community. They show difficulties in the accomplishment of the proofs, in particular, to know what results to use and how to write them (the most problematic aspect until the end). The proofs carried through make use of the direct method and the counter-example. Their acceptances depend on all the members of the classroom community.

Key-words: Learning; formulation of conjectures; testing conjectures; proof of conjectures; mathematical investigations; *Geometer´s Sketchpad.*